

רקורסיות

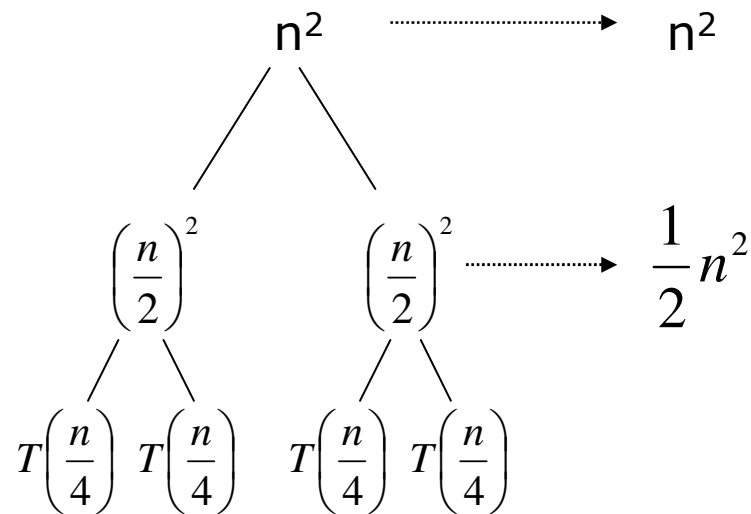
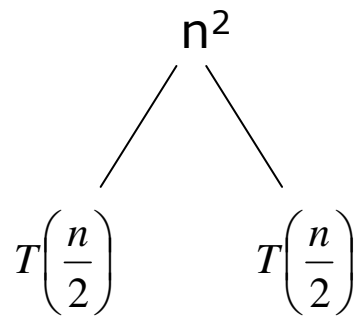
מבוסס על מצגת של
ליאור שפירא

רקורסיה

- $T(n) = aT(g(n)) + h(n)$ נקבל ביטוי מהצורה
- $T(n) = \Theta(f(n))$ נרצה למצוא $f(n)$ כך ש-
- n מספר שלם
- תמיד נחשב עד תנאי עצירה מסוים
- בקורס הזה נתעניין בהתנהגות האסימפטוטית של T ולא בחישוב מדויק

עץ רקורסיה

$$T(n) = 2T(n/2) + n^2$$



$$T(n) = \sum_{i=0} \frac{2^i n^2}{2^{2i}} = \sum_{i=0} \frac{n^2}{2^i}$$

קיבלנו טור גיאומטרי:

תרגיל 1

פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 9T(n/7) + n$ □

פתרון 1: Brute Force $T(n) = \Theta(f(n))$ □

$$T(n) = 9T(n/7) + n =$$

$$9(9T(n/49) + n/7) + n = 81T(n/49) + \frac{9n}{7} + n =$$

$$81(9T(n/7^3) + n/49) + \frac{9n}{7} + n = 9^3T(n/7^3) + 9^2 \frac{n}{7^2} + 9\frac{n}{7} + n =$$

...

$$9^{k+1}T(n/7^{k+1}) + n \left(1 + \frac{9}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{7}\right)^k \right)$$

∞

תרגיל 1

□ מה עשינו לא נכון?

■ אי אפשר להמשיך עד אינסוף, צריך לעצור ב- $T(1)$ או קבוע אחר

■ באיזה k נעצור? $\frac{n}{7^{k_0+1}} = 1 \Rightarrow 7^{k_0+1} = n \Rightarrow k_0 = \log_7 n$

■ זהו עומק הרקורסיה (ההתפצלות מדרגה 7)

■ ונחזור לביטוי...

$$T(n) = 9^{\log_7 n+1} \cdot T\left(\frac{n}{7^{\log_7 n+1}}\right) + n\left(1 + \frac{9}{7} + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{7}\right)^{\log_7 n}\right)$$

$$= \Theta\left(9^{\log_7 n} + n\left(\frac{9}{7}\right)^{\log_7 n}\right) = \Theta\left(n^{\log_7 9}\right)$$

■ הביטוי השמאלי: מספר העלים, שאר הביטויים: הצמתים הפנימיים

רקורסיה – Master Theorem

□ "מתכון" לפתור רקורסיות מסוג מסוים

□ עבור נוסחת רקורסיה כך ש $T(n) = aT(n/b) + f(n)$

□ קיימים שלושה מקרים

1. $\exists \varepsilon > 0:$ $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

3. $\exists \varepsilon > 0, c < 1:$ $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$
 $af(n/b) \leq cf(n) \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

$$T(n) = 9T(n/7) + n$$

חזרה לתרגיל 1

$$a=9; b=7; f(n)=n \quad \square$$

האם אנחנו במקרה הראשון? \square

$$\exists \varepsilon : n = O(n^{\log_7 9 - \varepsilon})$$

$$\log_7 9 \approx 1.2$$

$$\varepsilon = 0.1 \Rightarrow n \leq n^{1.1} \Rightarrow$$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_7 9})$$

דוגמה נוספת

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 10n$$

$$a = 2, b = 2, f(n) = 10n, \log_b a = \log_2 2 = 1$$

$$n^{\log_b a - \varepsilon} = n^{1 - \varepsilon} \quad \longrightarrow \quad 10n = O(n^{1 - \varepsilon}) ?$$

$$n^{\log_b a} = n \quad \longrightarrow \quad 10n = \Theta(n) ?$$

מסקנה: זהו מקרה 2

תרגיל 2

פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$ □

פתרון □

האם מתאים ל-master theorem? ■

לא □

ננסה לפתור בצורה ישירה ■

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$$

$$T(n) = \sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}T(\sqrt{\sqrt{n}}) + \sqrt{n}) + n$$

$$T(n) = \sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{n}}(\sqrt{n}(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}T(\sqrt{\sqrt{\sqrt{n}}}) + \sqrt{\sqrt{n}}) + n) + \sqrt{n}) + n$$

לא נראה רעיון כזה טוב ■

תרגיל 2

$$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$$

□ רמז: איננו מעוניינים בפתרון מדויק, אלא בהערכה, סדר גודל.

□ רמז: ננסה לפתור עבור ח'ים ספציפיים, מסוג מסוים.

□ למשל $n = 2^{2^m}$

□ עבורו

$$T(2^{2^m}) = \sqrt{2^{2^m}} T(\sqrt{2^{2^m}}) + 2^{2^m}$$

$$= 2^{2^{m-1}} T(2^{2^{m-1}}) + 2^{2^m}$$

$$= m \cdot 2^{2^m} \leftarrow \text{ערך בכל חזרה}$$

חזרות \rightarrow

$$(n = 2^{2^m} \rightarrow m = \log \log n)$$

$$= n \log \log n$$

תרגיל 3

פתרו את הרקורסיה הבאה: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \log^2 n$ □

פתרון □

בואו ננסה לפתוח את זה קצת...

$$T(n) = n \log^2 n + n \log^2 \left(\frac{n}{2}\right) + n \log^2 \left(\frac{n}{4}\right) + n \log^2 \left(\frac{n}{8}\right) + \dots$$

נמצא חסם משני הצדדים ■

תרגיל 3

□ חסם תחתון

- בואו נשמור רק את חצי האברים הגדולים ביותר
- מיהו האבר הקטן ביותר ששמרנו?

$$\frac{n}{2^{\log n / 2}} = n \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{\log n}}} = n \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

- לכן אם נחליף את n/k בשורש n נקבל...

$$T(n) \geq \frac{\log n}{2} n \log^2 \sqrt{n} = \frac{\log n}{2} n \left(\frac{1}{2} \log n\right)^2 = \frac{n \log^3 n}{8}$$

$$T(n) = \Omega(n \log^3 n)$$

תרגיל 3

□ חסם עליון

■ נחליף כל n/k ב- n ונקבל

$$T(n) \leq n \log^2 n + n \log^2(n) + n \log^2(n) + n \log^2(n) + \dots$$

$$= \log n \cdot n \log^2(n) = n \log^3 n$$

$$T(n) = O(n \log^3 n)$$